

ICAB Coque

Complément ICAB Surface

manuel de référence

Table des Matières

NOTATIONS.....	2
1 Description géométrique.....	3
1.1 Position d'un point sur la coque.....	3
1.2 Courbures.....	4
1.3 Déplacements.....	7
1.4 Déformations.....	8
2 Loi de comportement.....	10
2.1 Efforts résultants.....	10
2.2 Matrices de rigidité.....	11
2.3 Contraintes.....	13
2.4 Critères de ruine.....	14
2.5 Efforts et contraintes de membrane.....	15

ICAB Coque

Application ICAB Surface

Introduction

L'objet de ce manuel de référence est de présenter les méthodes de calcul employées pour les coques dans les applications ICAB.

NOTATIONS

Dans ce manuel, les notations employées ne sont pas explicitées à chaque occurrence de manière à ne pas surcharger le texte. Si vous cherchez la signification d'une notation, vous trouverez la réponse la liste ci-dessous.

Les unités indiquées sont exprimées dans le Système International. L'unité de longueur est le mètre (m), l'unité de masse est le kilogramme (kg), l'unité de temps est la seconde (s), l'unité de température est le Kelvin (0K = -273 degrés centigrades) et l'unité de force qui en résulte est le Newton (N=kg.m.s⁻²).

E	module d'élasticité longitudinale ou module d'Young. (E, Pa=N/m ²)
G	module de cisaillement, pour un matériau isotrope $G = E/(1+\nu)/2$ (Pa=N/m ²)
ν	coefficient de Poisson (NU)
N_{xx}	effort de traction ou compression linéique (N/m)
T_{xz}	effort tranchant linéique (N/m)
M_{xx}	moment fléchissant linéique (N)
h	épaisseur d'une coque (m)
(p)	point sur la surface moyenne de la coque
\mathbf{t}_1	premier vecteur tangent au point (p)
\mathbf{t}_2	deuxième vecteur tangent au point (p)
\mathbf{n}	vecteur normal à la surface de la coque au point (p)
[Q]	base orthonormée définissant le repère tangent au point (p) $[Q] = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}]$ telle que $d\{X\} = [Q] d\{x\}$, $d\{x\} = [Q]^T d\{X\}$
x	première coordonnée curviligne selon le vecteur \mathbf{t}_1 .
X	première coordonnée dans le repère global fixe $[e_x, e_y, e_z]$.
x	première coordonnée paramétrique de la coque
h	deuxième coordonnée paramétrique de la coque
z	troisième coordonnée paramétrique telle que $z=z/h/2$
[F]	matrice telle que $d\{X\} = [F] d\{x\}$, $\{x\}$ est le vecteur colonne $\{x, h, z\}$
[J]	matrice jacobienne, $[J] = [F]^T$

Conventions

U,x	dérivée première de la grandeur U par rapport à la variable x (dU/dx).
U,xx	dérivée seconde de la grandeur U par rapport à la variable x (d^2U/dx^2).
$\{x\}$	vecteur en colonne dont les coordonnées sont $\{x, y, z\}$.
\mathbf{x}	vecteur en colonne (en gras)
$\langle x \rangle$	vecteur en ligne
[M]	matrice
$[M]^T$	transposée de la matrice [M]

1 Description géométrique

En termes non mathématiques, une coque est un solide élancé dont une dimension, l'épaisseur, est très inférieure aux deux autres. Cette particularité permet de simplifier l'étude mécanique d'une coque par rapport à celle d'un corps solide quelconque.

Le volume V d'une coque est engendré par une surface moyenne A et sa normale \mathbf{n} s'étendant sur une épaisseur h . L'épaisseur totale h peut varier d'un point à l'autre, mais reste petite par rapport aux quantités géométriques qui caractérisent la surface A . Si L et R représentent une longueur et un rayon de courbure caractéristiques de la coque, il faut s'assurer que l'épaisseur de la coque est petite par rapport à la largeur, à la longueur et au rayon de courbure de la coque. Les ordres de grandeur à respecter sont $h \ll R/16$, $h \ll L/4$.

Ce chapitre résume brièvement les hypothèses et les théorèmes utilisés en résistance des matériaux pour la modélisation de structures utilisant des coques.

Hypothèse fondamentale:

Quelles que soient les sollicitations appliquées à une coque, tout segment normal à la surface de la coque reste droit.

Il en résulte que la position d'un point quelconque \mathbf{x}_q de la coque peut être décrite par la position d'un point \mathbf{x}_p sur la surface médiane et sa distance algébrique z le long de la normale \mathbf{n} à la surface moyenne. Nous allons développer cette assertion.

1.1 Position d'un point sur la coque

La géométrie d'une coque est caractérisée par une surface moyenne A et une épaisseur h . La surface A est décrite par deux coordonnées paramétriques (x, h) . Un point \mathbf{x}_p de la surface moyenne A est repéré par trois coordonnées (X, Y, Z) :

$$\vec{X}_p = X(\xi, \eta)\vec{e}_x + Y(\xi, \eta)\vec{e}_y + Z(\xi, \eta)\vec{e}_z$$

Les vecteurs $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ sont les trois vecteurs orthonormés de la base cartésienne du repère global fixe. Un élément différentiel s'écrit:

$$d\vec{X}_p = \frac{\partial \vec{X}_p}{\partial \xi} \cdot d\xi + \frac{\partial \vec{X}_p}{\partial \eta} \cdot d\eta = \vec{a}_1 \cdot d\xi + \vec{a}_2 \cdot d\eta$$

$$\vec{a}_1 = \begin{Bmatrix} X_{,\xi} \\ Y_{,\xi} \\ Z_{,\xi} \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{Bmatrix} X_{,\eta} \\ Y_{,\eta} \\ Z_{,\eta} \end{Bmatrix}$$

Le vecteur \mathbf{n} normal à la surface de la coque est défini à partir des vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 pour former la matrice $[F_0] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}]$ dite covariante:

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|} \quad \vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2 = \begin{Bmatrix} Y_{,\xi}Z_{,\eta} - Y_{,\eta}Z_{,\xi} \\ Z_{,\xi}X_{,\eta} - Z_{,\eta}X_{,\xi} \\ X_{,\xi}Y_{,\eta} - X_{,\eta}Y_{,\xi} \end{Bmatrix} \quad dA = \sqrt{a} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad \sqrt{a} = |\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2|$$

$$[F_0] = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{n}] = \begin{bmatrix} X_{,\xi} & X_{,\eta} & n_x \\ Y_{,\xi} & Y_{,\eta} & n_y \\ Z_{,\xi} & Z_{,\eta} & n_z \end{bmatrix}$$

Les vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 ne sont a priori ni unitaires ni orthogonaux. On leur associe les vecteurs $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2)$ pour former la base duale (ou contravariante) telle que:

$$\vec{a}^1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}^2 \cdot \vec{a}_2 = 1 \quad \vec{a}^1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{a}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d\xi = \vec{a}^1 \cdot d\vec{X}_p & d\eta = \vec{a}^2 \cdot d\vec{X}_p \\ a^1 = \frac{\vec{a}_2 \otimes \vec{n}}{\sqrt{a}} & a^2 = \frac{\vec{n} \otimes \vec{a}^1}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

$$[F_0] = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{n}] \quad [F_0]^{-T} = [\vec{a}^1 \quad \vec{a}^2 \quad \vec{n}] \quad [F_0]^{-1} \cdot [F_0] = [1]$$

NB. Si la base $[F_0] = [a_1, a_2, n]$ est orthonormée, nous obtenons $[F_0]^T = [F_0]^{-1}$, soit $[F_0]^{-T} = [F_0]$.

1.2 Courbures

Nous avons caractérisé les variations différentielles d'un point (p) sur la surface médiane de la coque. Nous allons maintenant décrire les variations d'un point (q) quelconque de la coque en faisant intervenir la distance algébrique z (ou encore z tel que $z = z_{h/2}$) entre le point (q) et (p) sur la surface moyenne.

$$\vec{X}_q = \vec{X}_{p(z=0)} + z \cdot \vec{n}, \quad z = h_{1/2} \zeta, \quad h_{1/2} = \frac{h}{2}$$

$$d\vec{X}_q = d\vec{X}_p + \vec{n}dz + z d\vec{n} = \vec{a}_1 d\xi + \vec{a}_2 d\eta + h_{1/2} \vec{n} d\zeta + h_{1/2} \zeta \cdot (\vec{n}_{,\xi} d\xi + \vec{n}_{,\eta} d\eta + \vec{n}_{,\zeta} d\zeta)$$

$$d\vec{X}_q = (\vec{a}_1 + z \vec{n}_{,\xi}) \cdot d\xi + (\vec{a}_2 + z \vec{n}_{,\eta}) \cdot d\eta + (\vec{n} + z \vec{n}_{,\zeta}) \cdot d\zeta$$

$$d\vec{X}_q = [\vec{a}_1 : \vec{a}_2 : \vec{n}] \cdot d\vec{\xi} + z [\vec{n}_{,\xi} : \vec{n}_{,\eta} : \vec{n}_{,\zeta}] \cdot d\vec{\xi}, \quad \langle d\vec{\xi} \rangle = \langle d\xi, d\eta, d\zeta \rangle$$

La matrice $[F_z] = [J]^T$ permet aussi de changer de base pour l'opérateur gradient $\{d/d\mathbf{X}\}$. La matrice $[F_z]$ se décompose en deux matrices $[F_0] + z[F_n]$.

$$d\vec{X}_q = [F_z] d\vec{\xi}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right\} = [F_z]^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{X}} \right\} = [J] \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{X}} \right\}$$

$$[F_z] = [\vec{a}_1 : \vec{a}_2 : \vec{n}] + z [\vec{n}_{,\xi} : \vec{n}_{,\eta} : \vec{n}_{,\zeta}] = [F_0] ([1] + z [B_n]), \quad z = \frac{h}{2} \zeta$$

$$[B_n] = [F_0]^{-1} [\vec{n}_{,\xi} : \vec{n}_{,\eta} : \vec{n}_{,\zeta}] = \begin{bmatrix} \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\eta} & \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\zeta} \\ \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\eta} & \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\zeta} \\ \vec{n} \cdot \vec{n}_{,\xi} = 0 & \vec{n} \cdot \vec{n}_{,\eta} = 0 & \vec{n} \cdot \vec{n}_{,\zeta} = 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\eta} & 0 \\ \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \Rightarrow 2\vec{n} \cdot d\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_{,\xi} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{n}_{,\eta} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{n}_{,\zeta} = 0$$

Pour une coque d'épaisseur constante, le vecteur \mathbf{n} ne dépend que des variables (x, h); sa dérivée partielle dans l'épaisseur est nulle $\mathbf{n}_{,z} = 0$.

Nous ferons donc l'approximation que la matrice $[B_n]$ se réduit à une sous-matrice 2x2 non nulle. L'inversion de la matrice $[F_z]$ conduit alors aux équations:

$$[J_z]^{-1} = ([1] + z[B_n])^{-1} [J_0]^{-1}$$

$$([1] + z[B_n])^{-1} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 + z \cdot b_{n22} & -z \cdot b_{n12} & 0 \\ -z \cdot b_{n21} & 1 + z \cdot b_{n11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\mu = 1 - 2Hz + Kz^2$$

$$2H = -(b_{n11} + b_{n22}), \quad K = (b_{n11}b_{n22} - b_{n12}b_{n21})$$

En ne conservant que les termes quadratiques en z , nous obtenons:

$$\frac{l}{\mu} = 1 + 2H \cdot z + (4H^2 - K)z^2 + O(z^3)$$

$$([1] + z[B_n])^{-1} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 + z \cdot bn_{22} & -z \cdot bn_{12} & 0 \\ -z \cdot bn_{21} & 1 + z \cdot bn_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$([1] + z[B_n])^{-1} = [1] + z[B_{n1}] + z^2[B_{n2}] + O(z^3)$$

$$[B_{n1}] = \begin{bmatrix} 2H + bn_{22} & -bn_{12} & 0 \\ -bn_{21} & 2H + bn_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_{n2}] = \begin{bmatrix} 4H^2 - K + 2Hbn_{22} & -2Hbn_{12} & 0 \\ -2Hbn_{21} & 4H^2 - K + 2Hbn_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N.B. La matrice $[B_n]$ définit les rayons de courbure (R_1, R_2) de la coque au point (p):

$$\left(\frac{l}{R_1}, \frac{l}{R_2}\right) = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

$$2H = \frac{l}{R_1} + \frac{l}{R_2}, K = \frac{l}{R_1 R_2}$$

H est la courbure moyenne, K la courbure totale ou gaussienne.

Définition des lignes de courbures

Les lignes de courbures au point (p) définies par le repère orthonormé $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{n})$ sont telles que:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial r} = -\frac{\bar{\mathbf{s}} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{R_1} = -\frac{\bar{\mathbf{r}}}{R_1}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial s} = \frac{\bar{\mathbf{r}} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{R_2} = -\frac{\bar{\mathbf{s}}}{R_2}$$

$$|\bar{\mathbf{r}}| = l, |\bar{\mathbf{s}}| = l, \bar{\mathbf{r}} \otimes \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{n}}$$

$$[R] = [\bar{\mathbf{r}} : \bar{\mathbf{s}} : \bar{\mathbf{n}}], [R]^{-1} = [R]^T$$

La recherche des vecteurs $[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$ et des rayons R_1 , et R_2 se ramène à la résolution des équations suivantes:

$$\begin{aligned}
d\bar{n} &= \bar{n}_{,r} dr + \bar{n}_{,s} ds = -\frac{\bar{r}}{R_1} dr - \frac{\bar{s}}{R_2} ds \\
\Leftrightarrow \bar{r} \cdot d\bar{n} &= -\frac{dr}{R_1}, \bar{s} \cdot d\bar{n} = -\frac{ds}{R_2}, \bar{n} \cdot d\bar{n} = 0 \\
\Leftrightarrow [R]^T \cdot d\bar{n} &= \begin{bmatrix} -\frac{dr}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ds}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} d\bar{r}
\end{aligned}$$

Soit encore:

$$d\bar{n} = [F_n] d\bar{\xi}, [F_n] = [\bar{n}_{,\xi}; \bar{n}_{,\eta}; \bar{n}_{,\zeta} = 0]$$

$$d\bar{X} = [F_0] d\bar{\xi} = [R] d\bar{r}$$

$$d\bar{n} = [F_n] [F_0]^{-1} [R] d\bar{r}$$

$$[R]^T \cdot d\bar{n} = [R]^T [F_n] [F_0]^{-1} [R] d\bar{r}$$

$$[R]^T [F_n] [F_0]^{-1} [R] d\bar{r} = -\begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} d\bar{r}$$

La recherche des lignes de courbures principales (\mathbf{r}, \mathbf{s}) et des rayons de courbure (R_1, R_2) se réduit donc à la recherche des vecteurs propres et valeurs propres du système suivant:

$$[R]^T [F_n] [F_0]^{-1} [R] \bar{r} = -\frac{1}{R} \bar{r}$$

$$\Leftrightarrow [F_n] [F_0]^{-1} \bar{r}_x = -\frac{1}{R} \bar{r}_x, \bar{r}_x = [R] \bar{r}$$

$$\Leftrightarrow [F_n] [F_0]^{-1} [F_0] \bar{r}_{x2} = -\frac{1}{R} [F_0] \bar{r}_{x2}, \bar{r}_x = [F_0] \bar{r}_{x2}$$

$$\Leftrightarrow [F_0]^{-1} [F_n] \bar{r}_{x2} = [B_n] \bar{r}_{x2} = -\frac{1}{R} \bar{r}_{x2}$$

$$\Rightarrow \det([B_n] + \frac{1}{R} [I]) = \frac{1}{R^2} + \frac{bn_{11} + bn_{22}}{R} + bn_{11}bn_{22} - bn_{12}bn_{21} = 0$$

Il existe une valeur propre triviale $1/R_3=0$ correspondant au vecteur propre \mathbf{n} , puisque $n_z=0$. Si les coordonnées (x, h) sont les directions principales:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sqrt{a_{11}}, \quad A_2 = \sqrt{a_{22}} \\
\vec{t}_1 &= \frac{\vec{a}_1}{A_1}, \quad \vec{t}_2 = \frac{\vec{a}_2}{A_2} \\
bn_{11} &= \frac{1}{R_1}, \quad bn_{22} = \frac{1}{R_2} \\
\vec{n}_{,\xi} &= -\frac{A_1}{R_1} \vec{t}_1, \quad \vec{n}_{,\eta} = -\frac{A_2}{R_2} \vec{t}_2 \\
\vec{t}_{1,\xi} &= -\frac{A_{1,\eta}}{A_2} \vec{t}_2 + \frac{A_1}{R_1} \vec{n}, \quad \vec{t}_{1,\eta} = \frac{A_{2,\xi}}{A_1} \vec{t}_2 \\
\vec{t}_{1,\xi} &= \frac{A_{1,\eta}}{A_2} \vec{t}_1, \quad \vec{t}_{1,\eta} = -\frac{A_{2,\xi}}{A_1} \vec{t}_1 + \frac{A_2}{R_2} \vec{n}
\end{aligned}$$

1.3 Déplacements

A tout point (p) sur la surface moyenne de la coque, il est possible de définir un repère local orthonormé $[Q]=(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$ tel que \mathbf{n} soit le vecteur normal défini ci-dessus. Les vecteurs \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 sont tangents à la surface et leur orientation peut par exemple être choisie pour représenter les directions principales d'un matériau orthotrope.

$$\vec{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}_p(\xi, \eta) + z(\xi, \eta) \vec{\beta}(\xi, \eta, \zeta), \quad \vec{\beta} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}_p &= u_x \vec{t}_1 + u_y \vec{t}_2 + u_z \vec{n} \\
u_x &= \vec{u} \cdot \vec{t}_1, \quad u_y = \vec{u} \cdot \vec{t}_2, \quad u_z = \vec{u} \cdot \vec{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\theta} &= \theta_x \vec{t}_1 + \theta_y \vec{t}_2 \\
\vec{\beta} &= \beta_x \vec{t}_1 + \beta_y \vec{t}_2 = \theta_y \vec{t}_1 - \theta_x \vec{t}_2 = \vec{\theta} \otimes \vec{n}
\end{aligned}$$

La rotation du point (q) autour du point (p) est caractérisée par les angles q_x (rotation autour de \mathbf{t}_1) et q_y (rotation autour de \mathbf{t}_2). En effet, tout point (q) sur un segment normal à la surface moyenne (le segment coupe la surface moyenne au point p) subit un mouvement de corps rigide dont les caractéristiques sont les trois déplacements (u_x, u_y, u_z) et les deux rotations (q_x, q_y). La rotation q_z autour de la normale \mathbf{n} est supposée nulle.

1.4 Déformations

Le tenseur des déformations $[\varepsilon]_x$ dans le repère tangent $[Q]$ se définit à partir de l'opérateur gradient $[L]_x$ tel que:

$$[\varepsilon]_x = \frac{1}{2}([L]_x + [L]_x^T)$$

$$(d\bar{u}_q)_x = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial z} dz = [\bar{u}_{q,x} \bar{u}_{q,y} \bar{u}_{q,z}] d\bar{x} = [L(\bar{u})]_x d\bar{x}$$

$$(d\bar{U}_q)_X = \bar{U}_{q,\xi} d\xi + \bar{U}_{q,\eta} d\eta + \bar{U}_{q,\zeta} d\zeta = [L(\bar{U})]_\xi d\bar{\xi} = [L]_\xi [F_z]^{-1} d\bar{X}$$

$$d\bar{X} = [Q]d\bar{x}, d\bar{U} = [Q]d\bar{u}$$

$$\Rightarrow d\bar{u}_q = [Q]^T d\bar{U} = [Q]^T [L]_\xi [F_z]^{-1} d\bar{X} = [Q]^T [L]_\xi [F_z]^{-1} [Q]d\bar{x}$$

$$- [L]_x = [Q]^T [L]_\xi [F_z]^{-1} [Q]$$

$$\Rightarrow [\varepsilon]_x = \frac{1}{2}([Q]^T [L]_\xi [F_z]^{-1} [Q] + [Q]^T [F_z]^{-T} [L]_\xi^T [Q])$$

Les déformations exprimées dans le repère tangent se calculent comme suit, en négligeant les variations d'épaisseur de coque ($dz=0$):

$$d\bar{u}_q = d\bar{u}_{(z=0)} + z d\bar{\beta} + \bar{\beta} dz, \bar{u} = \bar{u}_{p(z=0)}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial x} \cdot \bar{t}_1 = (\bar{u}_{,x} + z\bar{\beta}_{,x}) \cdot \bar{t}_1$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial y} \cdot \bar{t}_2 = (\bar{u}_{,y} + z\bar{\beta}_{,y}) \cdot \bar{t}_2$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial z} \cdot \bar{n} = \bar{\beta} \cdot \bar{n} = 0$$

Les déformations de cisaillement sont:

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial x} \cdot \bar{t}_2 + \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial y} \cdot \bar{t}_1 = (\bar{u}_{,x} + z\bar{\beta}_{,x}) \cdot \bar{t}_2 + (\bar{u}_{,y} + z\bar{\beta}_{,y}) \cdot \bar{t}_1$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial x} \cdot \bar{n} + \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial z} \cdot \bar{t}_1 = (\bar{u}_{,x} + z\bar{\beta}_{,x}) \cdot \bar{n} + \bar{\beta} \cdot \bar{t}_1$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial y} \cdot \bar{n} + \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial z} \cdot \bar{t}_2 = (\bar{u}_{,y} + z\bar{\beta}_{,y}) \cdot \bar{n} + \bar{\beta} \cdot \bar{t}_2$$

Pour définir les déformations sur une coque paramétrée ($x, h, z = z.2/h$), nous devons exprimer les dérivées partielles par rapport aux coordonnées curvilignes (x, y, z) du repère tangent local $[Q]=[t_1, t_2, n]$ en fonction des dérivées partielles des paramètres (x, y, z).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{Bmatrix} = [Q]^{-1} \begin{Bmatrix} f_{,X} \\ f_{,Y} \\ f_{,Z} \end{Bmatrix} \quad [Q]^{-T} = [Q] = [\bar{t}_1 \quad \bar{t}_2 \quad \bar{n}] = \begin{bmatrix} x_{,X} & y_{,X} & z_{,X} \\ x_{,Y} & y_{,Y} & z_{,Y} \\ x_{,Z} & y_{,Z} & z_{,Z} \end{bmatrix}$$

La matrice de passage $[Q]$ des coordonnées locales dans les coordonnées globales est orthonormée et donc $[Q]^{-1}=[Q]^T$. Exprimons maintenant les dérivées dans le repère global par rapport aux coordonnées

paramétriques (ξ, η, ς):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial \varsigma} \cdot \frac{\partial \varsigma}{\partial X} \\ \frac{\partial f}{\partial Y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial \varsigma} \cdot \frac{\partial \varsigma}{\partial Y} \\ \frac{\partial f}{\partial Z} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial Z} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial Z} + \frac{\partial f}{\partial \varsigma} \cdot \frac{\partial \varsigma}{\partial Z} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{,X} \\ f_{,Y} \\ f_{,Z} \end{Bmatrix} = [F_{\xi}]^{-1} \begin{Bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \\ f_{,\varsigma} \end{Bmatrix} \quad [F_x]^T = \begin{bmatrix} X_{,\xi} & Y_{,\xi} & Z_{,\xi} \\ X_{,\eta} & Y_{,\eta} & Z_{,\eta} \\ X_{,\varsigma} & Y_{,\varsigma} & Z_{,\varsigma} \end{bmatrix}$$

Nous avons donc:

$$\begin{Bmatrix} f_{,X} \\ f_{,Y} \\ f_{,Z} \end{Bmatrix} = [Q]^T [F_{\xi}]^{-T} \begin{Bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \\ f_{,\varsigma} \end{Bmatrix} = \left[\frac{\partial X}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial X} \right] \begin{Bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \\ f_{,\varsigma} \end{Bmatrix}$$

$$[C_z] = [Q]^T [F_z]^{-T} \approx [Q]^T [F_0]^{-T} \left(1 + z[B_{n1}]^T + z^2[B_{n2}]^T + o[z^3] \right)$$

$$[C_0] = [Q]^T [F_0]^{-T} = \begin{bmatrix} \bar{t}_1 \cdot \bar{a}^1 & \bar{t}_1 \cdot \bar{a}^2 & 0 \\ \bar{t}_2 \cdot \bar{a}^1 & \bar{t}_2 \cdot \bar{a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{h} \end{bmatrix}$$

2 Loi de comportement

2.1 Efforts résultants

Les efforts résultants de membrane, moments de flexion et de cisaillement sont définis comme suit pour une plaque plane:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz$$

$$\begin{bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{bmatrix} = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz$$

La loi de comportement d'une coque plane est rappelée ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ T_{xz} \\ T_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[A_M] & h^2[B_C] & 0 \\ h^2[B_C]^T & \frac{h^3}{12}[D_B] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6}h[S] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

$$[A_M] = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{bmatrix} \quad [D_B] = \begin{bmatrix} d11 & d12 & d13 \\ d12 & d22 & d23 \\ d13 & d23 & d33 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} s11 & s12 \\ s12 & s22 \end{bmatrix} \quad [B_C] = \begin{bmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b12 & b22 & b23 \\ b13 & b23 & b33 \end{bmatrix}$$

- e déformation de membrane sur la surface médiane
- χ courbures
- γ déformation de cisaillement sur la surface médiane
- N efforts de membrane (force linéique, N/m)
- M moments fléchissants linéiques (N)
- T efforts tranchants linéiques

Les matrices de rigidités de membrane [A], de flexion [D], de couplage membrane/flexion [B] et

cisaillement $[S]$ peuvent être définies coefficient par coefficient. Toutefois, ces matrices sont directement calculées pour des matériaux isotropes, orthotropes ou anisotropes ou résultent de l'intégration des couches pour les panneaux composites.

Effet thermique

Lorsque la plaque est soumise à une élévation de température T et un gradient ∇T à travers son épaisseur, la loi de comportement devient:

$$[N] = [E] (\varepsilon - \varepsilon^0)$$

où ε^0 correspond aux déformations thermiques:

$$\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \cdot T \\ \alpha_y \cdot T \\ \alpha_{xy} \cdot T \\ \alpha_x \cdot \nabla T \\ \alpha_y \cdot \nabla T \\ \alpha_{xy} \cdot \nabla T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

α est le coefficient de dilatation thermique (éventuellement orthotrope).

Pour un matériau isotrope, $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$, $\alpha_{xy} = 0$.

2.2 Matrices de rigidité

Pour un état de contraintes planes, c'est-à-dire avec la composante $\sigma_{zz}=0$, les relations générales contraintes/déformation sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_m] & [As] \\ [As]^T & [S] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Si le matériau possède des axes d'orthotropie, alors dans ce repère, les termes de couplage $[As]$ entre les contraintes de membrane (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy}) et les contraintes de cisaillement transverse (σ_{xz} , σ_{yz}) sont nuls.

Dans le cas d'un matériau isotrope, nous obtenons:

$$[A_M] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, [D_B] = [A_M], [B_C] = [0]$$

$$[S] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

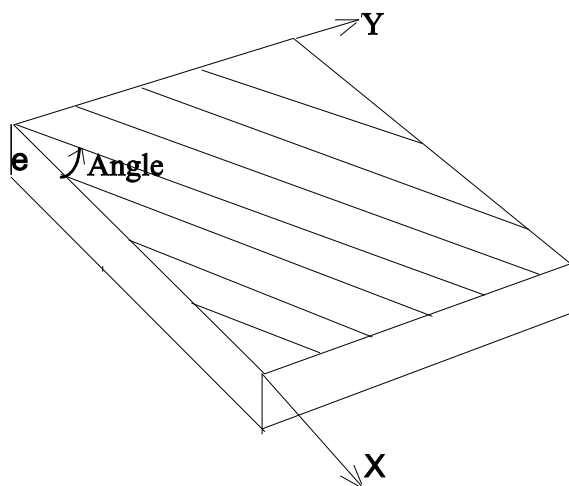
Dans le cas d'un matériau orthotrope et pour une coque plane, nous obtenons:

$$[A_M] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix}, [D_B] = [A_M], [B_C] = [0]$$

$$[S] = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix}, \nu_{xy}E_y = \nu_{yx}E_x$$

Changement d'orientation

Si l'angle φ d'orientation du matériau par rapport à l'orientation du repère local de la coque n'est pas nul, la matrice contrainte/déformation devient :



$$[R1] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)^2 & \sin(\varphi)^2 & \cos(\varphi).\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi)^2 & \cos(\varphi)^2 & -\cos(\varphi).\sin(\varphi) \\ -2.\cos(\varphi).\sin(\varphi) & 2.\cos(\varphi).\sin(\varphi) & \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 \end{bmatrix} \quad [R2] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[A_m(\varphi)] = [R1]^T \cdot [A_m(0)] \cdot [R1] \quad [S(\varphi)] = [R2]^T \cdot [S(0)] \cdot [R2]$$

Stratifié

Pour un panneau constitué d'un empilement de couches dont les matrices caractérisant les relations contrainte/déformation sont $[A_M]_z$ en contraintes planes et $[S]_z$ en cisaillement, les matrices de rigidité de ce composite multicouche sont:

$$[A_m] = \frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} [A_m]_z \cdot dz = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N [A_m]_k \cdot h_k \quad h_k = e_k = z_{2k} - z_{1k}$$

$$[S] = \frac{1}{h} \int_{z_1}^{z_2} [S]_z \cdot dz = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N [S]_k \cdot h_k$$

$$[B_C] = \frac{1}{h^2} \int_{z_1}^{z_2} [A_m]_z \cdot z \cdot dz = \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^N [A_m]_k \cdot Z1_k \cdot h_k \quad Z1_k = \frac{z_{2k} + z_{1k}}{2}$$

$$[D_B] = \frac{12}{h^3} \int_{z_1}^{z_2} [A_m]_z \cdot z^2 \cdot dz = \frac{12}{h^3} \sum_{k=1}^N [A_m]_k \cdot Z2_k \cdot h_k$$

$$Z2_k \cdot h_k = \frac{z_{2k}^3 - z_{1k}^3}{3} = h_k \cdot \frac{z_{2k}^2 + z_{1k}^2 + z_{1k} \cdot z_{2k}}{3}$$

$h=z_2-z_1$ est l'épaisseur totale du composite.

$z=0$ correspond à la surface moyenne du composite si le paramètre d'excentration ECZ du stratifié est nul.

Lorsque le composite comprend un nombre fini de couches, les intégrales peuvent être remplacées par des sommes discrètes. Les notations choisies sont $Z1_k$ pour la distance algébrique entre la surface moyenne de la coque composite et le centre de la $k^{\text{ème}}$ couche, h_k pour l'épaisseur de la $k^{\text{ème}}$ couche comprise entre z_{1k} et z_{2k} .

2.3 Contraintes

Le tenseur des contraintes planes des coques est:

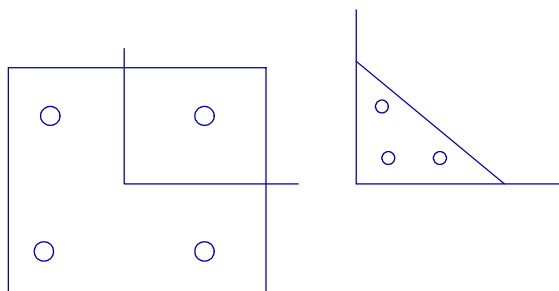
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}, \quad [\sigma] = [A_M] \cdot [\varepsilon], \quad [\tau] = [S] \cdot [\gamma]$$

De manière analogue pour les poutres, les contraintes dans les coques varient suivant l'épaisseur. Les cisaillements τ_{xz} et τ_{yz} sont maximaux sur la surface neutre centrale. Les contraintes de membrane σ_{xx} , σ_{yy} , $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$ croissent vers les surfaces libres sous l'action de moments fléchissants.

ICAB sauvegarde les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} sur la face supérieure et inférieure, les cisaillements τ_{xz} et τ_{yz} sur la surface neutre. La contrainte de Mises est indiquée pour la plus grande valeur obtenue sur la face inférieure, au centre et sur la face supérieure. Les valeurs des contraintes sont calculées aux quatre points de Gauss pour une coque triangulaire ou aux trois points de Gauss pour une coque triangulaire.

Pour un quadrilatère dont les noeuds sont placés aux coordonnées N1 (-1,-1), N2 (1,-1), N3(1,1), N4 (-1,1), les points de Gauss sont aux coordonnées $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$.

Pour un triangle dont les noeuds sont placés aux coordonnées N1 (0,0), N2 (1,0), N3(0,1), les points de Gauss sont aux coordonnées $(1/3, 1/3)$, $(2/3, 1/3)$, $(1/3, 2/3)$.



NB. Pour les coques stratifiées, seules les

contraintes de la première couche ou pli sont indiquées. En revanche des critères de Mises (ou Tsai-Wu) sont indiqués pour toutes les couches.

2.4 Critères de ruine

Le critère de Von Mises est utilisé pour déterminer si un matériau isotrope subit une plastification. Pour un tenseur de contrainte symétrique quelconque, le critère de non-plastification d'un matériau isotrope ayant une limite élastique f_y est:

$$\sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{2 f_y^2}} \leq 1$$

Pour les coques où la contrainte $\sigma_{zz}=0$, la contrainte de Von Mises correspond au calcul précisé à la section 6.2.1 de la norme EN1993-1-6 :

$$\frac{\sqrt{(\sigma_{xx})^2 + (\sigma_{yy})^2 - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}}{f_y} \leq 1$$

NB : dans le cas d'un cisaillement pur, le critère de Von Mises vérifie

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \tau}{f_y} \leq 1$$

Le critère de Von Mises ne peut s'appliquer qu'à des matériaux isotropes.

Dans le cas de composites ou du bois, les contraintes admissibles dépendent non seulement de la direction de sollicitation mais également du sens de traction ou compression.

Le critère de Tsai-Wu généralise le critère de Von Mises à des matériaux orthotropes dont les contraintes admissibles dans les 3 axes d'orthotropie sont les suivantes:

X_t, X_c	traction et compression dans le sens 1
Y_t, Y_c	traction et compression dans le sens 2
Z_t, Z_c	traction et compression dans le sens 3
$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$	cisaillements

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx} \left(\frac{\sigma_{xx}}{X_t X_c} + \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{\sigma_{yy}}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) + \sigma_{zz} \left(\frac{\sigma_{zz}}{Z_t Z_c} + \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c} \right) \\ & - (1 + f_{12}) \frac{\sigma_{xx} \sigma_{yy}}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} - (1 + f_{23}) \frac{\sigma_{yy} \sigma_{zz}}{\sqrt{Y_t Y_c Z_t Z_c}} - (1 + f_{13}) \frac{\sigma_{xx} \sigma_{zz}}{\sqrt{X_t X_c Z_t Z_c}} \\ & + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{12}^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{\tau_{23}^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\tau_{13}^2} \leq 1 \end{aligned}$$

NB. Les critères de Mises et de TsaiWu calculés par ICAB correspondent à la racine carrée de l'expression indiquée ci-dessus. Ces critères sont donc proportionnels aux charges pour un calcul linéaire.

Pour un matériau isotrope transverse, le critère de Tsai-Wu est identique au critère de Hill si:

$$\begin{aligned} X &= X_t = X_c; Y = Y_t = Y_c = Z_t = Z_c \\ f_{12} &= f_{13} = Y/X - 1; f_{23} = 1 - Y/X \end{aligned}$$

Le critère de Tsai-Wu est identique au critère de Von Mises si:

$$X_t = X_c = Y_t = Y_c = Z_t = Z_c = \sigma_0$$

$$t_{12} = t_{23} = t_{13} = t_0 = s_0/\sqrt{3}$$

$$f_{12} = f_{23} = f_{13} = 0$$

Valeurs par défaut: si toutes les contraintes admissibles ne sont pas indiquées dans les caractéristiques du matériau, alors les valeurs suivantes sont appliquées:

$$Z_t=0 \Rightarrow Z_t = Y_t$$

$$t_{13}=0 \Rightarrow t_{13} = t_{12}$$

$$t_{23}=0 \Rightarrow t_{23} = t_{12}$$

$$X_c=0 \Rightarrow X_c = X_t$$

$$Y_c=0 \Rightarrow Y_c = Y_t$$

$$Z_c=0 \Rightarrow Z_c = Y_t$$

2.5 Efforts et contraintes de membrane

L'Eurocode 3 (EN1993-1-6, section 6.2) définit l'effort de membrane. Lorsqu'une plaque d'épaisseur (t) n'est pas soumise à un effort de flexion, ni de cisaillement transverse (effort tranchant), la contrainte membranaire est calculée comme suit à partir de l'effort tranchant (N):

$$\sigma_{eq,membrane} = \frac{1}{t} \sqrt{N_{xx}^2 + N_{yy}^2 - N_{xx} \cdot N_{yy} + 3 \cdot N_{xy}^2}$$

Dans le cas plus général où une plaque d'épaisseur t est soumise à une flexion (M) et des efforts tranchants (Q), les contraintes varient en fonction de la position z ($-t/2 < z < t/2$) dans l'épaisseur de la plaque :

$$\sigma_{xx,Ed} = \frac{N_{xx}}{t} + \varepsilon \cdot \frac{M_{xx}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}, \varepsilon = \frac{z}{\frac{t}{2}}, -1 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$\sigma_{yy,Ed} = \frac{N_{yy}}{t} + \varepsilon \cdot \frac{M_{yy}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}, \tau_{xy,Ed} = \frac{N_{xy}}{t} + \varepsilon \cdot \frac{M_{xy}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$\tau_{xz,Ed} = \frac{Q_{yxz}}{t}, \sigma_{yz,Ed} = \frac{Q_{yz}}{t}$$

La contrainte de Mises est

$$\sigma_{eq,Ed} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

La contrainte membranaire est définie comme la contrainte dans le plan de surface neutre de la plaque (sans flexion, ni effort tranchant):

$$\sigma_{eq,membrane(z=0)} = \sqrt{\sigma_{xx,z=0}^2 + \sigma_{yy,z=0}^2 - \sigma_{xx,z=0} \cdot \sigma_{yy,z=0} + 3 \cdot \tau_{xy,z=0}^2}$$

$$\sigma_{eq,membrane(z=0)} = \frac{1}{t} \sqrt{N_{xx}^2 + N_{yy}^2 - N_{xx} \cdot N_{yy} + 3 \cdot N_{xy}^2}$$

Dans la plupart de cas de chargement avec effort tranchant et flexion de la coque, l'état de contrainte maximal est atteint sur la peau de coque, en face supérieure ($z=t/2$) ou face inférieure ($z=-t/2$).